Applications - Chapitre 4

Oscillateur harmonique et mouvement circulaire

- Equation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre : équation linéaire liant une fonction $f(t)$ et sa dérivée seconde :

$$(A.4.1)$$

  on considère uniquement le cas le plus simple où il n'y a pas de dérivée première.

- Equation différentielle : $(A.4.1)$ remise en forme $(\alpha \neq 0)$

$$(A.4.2)$$

- Changement de "variable" : fonction $g(t)$ rendant l'équation différentielle $(A.4.2)$ homogène :

$$(A.4.3)$$

- Dérivée seconde : changement de "variable" $(A.4.3)$

$$(A.4.4)$$

- Equation différentielle homogène : à partir de l'équation différentielle inhomogène en substituant $(A.4.3)$ et $(A.4.4)$ dans $(A.4.2)$:

$$(A.4.5)$$

- Proposition : équation différentielle homogène du premier ordre

$$(A.4.6)$$

Démonstration :

- Solutions complexes particulières : équation différentielle $(A.4.6)$

$$(A.4.7)$$

- Fonctions trigonométrique : formule d'Euler inverse

$$(A.4.8)$$

- Solution réelle : combinaison linéaire de solutions réelles particulières

$$(A.4.9)$$

- Dérivée temporelle de la solution réelle :

$$(A.4.10)$$

- Conditions initiales : $(A.4.9)$ et $(A.4.10)$ évalués en $t = 0$

$$(A.4.11)$$

- Solution réelle : $(A.4.11)$ dans $(A.4.9)$

$$(A.4.12)$$

- Solution réelle : équation différentielle homogène

$$(A.4.12)$$

- Changement de "variable" : inverse

$$(A.4.13)$$

- Conditions initiales : $(A.4.13)$ et dérivée évaluées en $t = 0$

$$(A.4.14)$$

$$(A.4.15)$$

- Solution réelle : équation différentielle inhomogène

$$(A.4.16)$$

- Solution réelle : équation différentielle inhomogène

$$f\left(t\right)=\left(f\left(0\right)+\frac{\beta}{\alpha^{2}}\right)\cos\left(\alpha\,t\right)+\frac{1}{\alpha}\,\frac{df}{dt}\left(0\right)\sin\left(\alpha\,t\right)-\frac{\beta}{\alpha^{2}}\qquad(A.4.16)$$

- Changement de variable : $A \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ et $\delta \in [0, 2\pi)$

$$(A.4.17)$$

- Solution réelle : $(A.4.17)$ dans $(A.4.16)$

$$(A.4.18)$$

- Formule de trigonométrie : angles $\alpha\,t$ et δ

$$(A.4.19)$$

- Solution réelle : $(A.4.19)$ dans $(A.4.18)$ et $(A.4.13)$

$$(A.4.20)$$

- Mouvement oscillatoire vertical : axe vertical Ox orienté vers le haut

  1. Position verticale : $f\,(t) \equiv$
  2. Position verticale relative : $g\,(t) \equiv$
  3. Angle de déphasage nul : $\delta \equiv$
  4. Pulsation et champ gravitationnel : $\alpha \equiv$ et $\beta \equiv$
  5. Amplitude : $A \equiv$

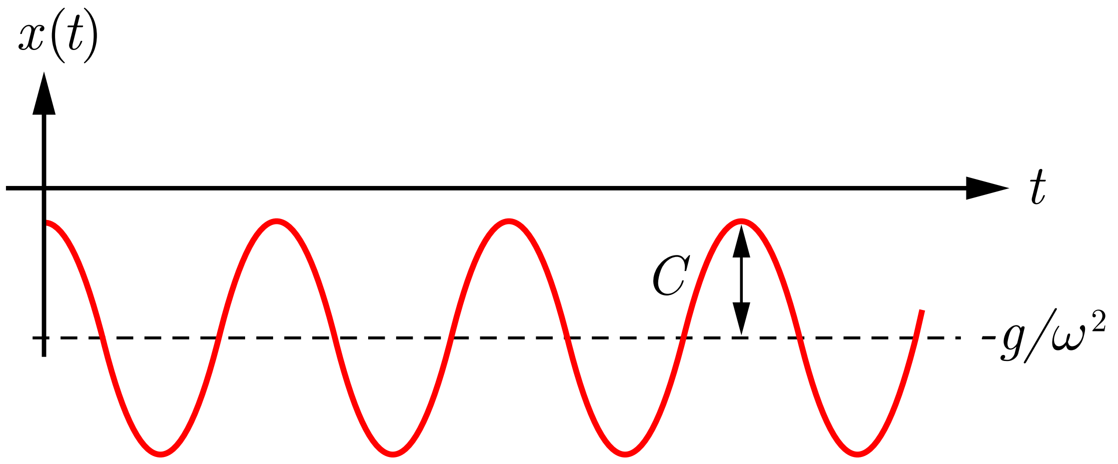
$(A.4.2) \quad \Rightarrow$

$(A.4.3) \quad \Rightarrow$

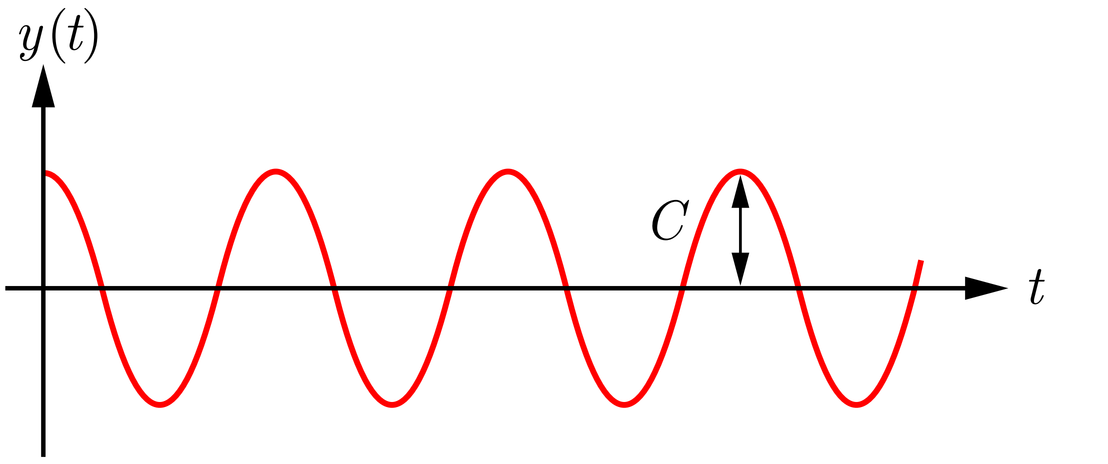
$(A.4.20b) \quad \Rightarrow$

$(A.4.20a) \quad \Rightarrow$

- Interprétation physique :



1. $x\,(t)$ est la position par rapport à l'origine correspondant à la position d'équilibre du ressort à vide.



2. $y\,(t)$ est la position par rapport à l'origine correspondant à la position d'équilibre du ressort lorsqu'une masse est suspendue au ressort.

- Longueur à vide des ressorts 1 et 2 : ℓ_1, ℓ_2

- Forces extérieures (masse m) :

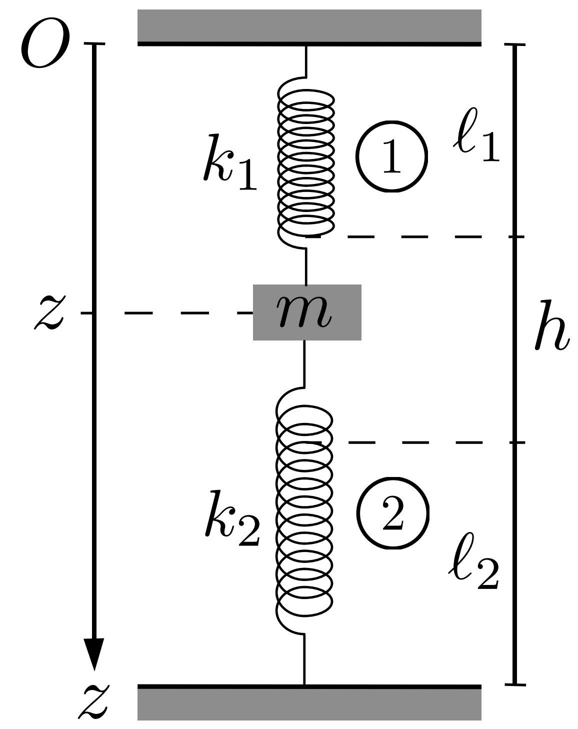
  1. Poids :

  2. Force élastique 1 :

  3. Force élastique 2 :

- Accélération (masse m) :

- Loi du mouvement (masse m) :



selon $\hat{\boldsymbol{z}}$: (A.4.21)

(A.4.22)

A.4.3 Oscillateur à double ressort

- Equation du mouvement : $(A.4.22)$ remise en forme

$$(A.4.23)$$

- Changement de variable : pour rendre homogène $(A.4.23)$

$$(A.4.24)$$

- Changement de variable : dérivée temporelle seconde

$$(A.4.25)$$

- Equation du mouvement : $(A.4.24)$ et $(A.4.25)$ dans $(A.4.23)$

$$(A.4.26)$$

- La distance $z_0 > 0$ correspond à la coordonnée de la position d'équilibre de la masse m (i.e. $x = 0$). Ainsi, la coordonnée x représente la déviation par rapport à équilibre.

- Oscillateur harmonique autour de la position d'équilibre $z = z_0$ où $x = 0$:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right) x = 0 \qquad (A.4.26)$$

- Pulsation :

$$(A.4.27)$$

Les constantes élastiques des ressorts s'additionnent :

- Période d'oscillation :

$$(A.4.28)$$

- Equations horaires :

$$(A.4.29)$$

$$(A.4.30)$$